

# 離散数学 資料 4

## 集合の濃度

鴨 浩靖

2020 年 11 月 10 日 初版  
2021 年 11 月 16 日 初版改訂版  
2022 年 3 月 30 日 初版三訂版

## 濃度の相等

$\#A = \#B \stackrel{\text{def}}{\iff} A$  から  $B$  への全単射が存在する

# 濃度の相等

$\#A = \#B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \text{ から } B \text{ への全単射が存在する}$

例

$$\#\{2, 3, 5, 7\} = \#\{0, 1, 2, 3\}$$

$$\#\mathbb{N} = \#\mathbb{Q}$$

# 濃度の相等

反射性

$$\#A = \#A$$

# 濃度の相等

反射性

$$\#A = \#A$$

証明.

$\text{id}_A : A \rightarrow A$  は全単射

□

# 濃度の相等

対称性

$$\#A = \#B \quad \text{ならば} \quad \#B = \#A$$

# 濃度の相等

対称性

$\#A = \#B$  ならば  $\#B = \#A$

証明.

$f : A \rightarrow B$  が全単射ならば  
 $f^{-1} : B \rightarrow A$  も全単射。

□

# 濃度の相等

推移性

$\#A = \#B$  かつ  $\#B = \#C$  ならば  $\#A = \#C$

# 濃度の相等

推移性

$\#A = \#B$  かつ  $\#B = \#C$  ならば  $\#A = \#C$

証明.

$f : A \rightarrow B$  と  $g : B \rightarrow C$  が全単射ならば  
 $g \circ f : A \rightarrow C$  も全単射。

□

## 濃度の大小

$\#A \leq \#B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \text{ から } B \text{ への単射が存在する}$

$\#A < \#B \stackrel{\text{def}}{\iff} \#A \leq \#B \text{ かつ } \#A \neq \#B$

# 濃度の大小

$\#A \leq \#B \stackrel{\text{def}}{\iff} A \text{ から } B \text{ への単射が存在する}$

$\#A < \#B \stackrel{\text{def}}{\iff} \#A \leq \#B \text{ かつ } \#A \neq \#B$

例

$$\#\{2, 3, 5, 7\} < \#\{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$\#\mathbb{N} < \#\mathbb{R}$$

## 濃度の相等と大小

$\#A = \#B$  ならば  $\#A \leq \#B$

## 濃度の相等と大小

$$\#A = \#B \text{ ならば } \#A \leq \#B$$

証明.

$f : A \rightarrow B$  が全単射ならば単射。

□

# 濃度の大小

推移性

$\#A \leq \#B$  かつ  $\#B \leq \#C$  ならば  $\#A \leq \#C$

# 濃度の大小

推移性

$\#A \leq \#B$  かつ  $\#B \leq \#C$  ならば  $\#A \leq \#C$

証明.

$f : A \rightarrow B$  と  $g : B \rightarrow C$  が単射ならば

$g \circ f : A \rightarrow C$  も単射。

□

# ベルンシュタインの定理

$\#A \leq \#B$  かつ  $\#B \leq \#A$  ならば  $\#A = \#B$

# ベルンシュタインの定理

$\#A \leq \#B$  かつ  $\#B \leq \#A$  ならば  $\#A = \#B$

証明は難しいので略。

# 比較可能性定理

$\#A \leq \#B$  または  $\#B \leq \#A$

# 比較可能性定理

$$\#A \leq \#B \text{ または } \#B \leq \#A$$

証明は難しいので略。

## 濃度の全順序性

$\#A < \#B$  と  $\#A = \#B$  と  $\#B < \#A$  のうち  
ちょうど一つだけが成り立つ。

## 濃度の全順序性

$\#A < \#B$  と  $\#A = \#B$  と  $\#B < \#A$  のうち  
ちょうど一つだけが成り立つ。

証明.

ベルンシュタインの定理と比較可能性定理より明らか。

詳細は練習問題とする



## 有限・無限・可算無限・連続無限

- ▶  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $\#\{0, 1, \dots, n-1\}$  を  $n$  と同一視する。  
たとえば、 $\#\{0, 1, 2\} = 3$
- ▶  $\#\mathbb{N}$  を  $\aleph_0$  とも書く。
- ▶  $\#\mathcal{P}\mathbb{N}$  を  $2^{\aleph_0}$  とも書く。

# 有限・無限・可算無限・連続無限

- ▶  $n \in \mathbb{N}$  に対して、 $\#\{0, 1, \dots, n-1\}$  を  $n$  と同一視する。  
たとえば、 $\#\{0, 1, 2\} = 3$
- ▶  $\#\mathbb{N}$  を  $\aleph_0$  とも書く。
- ▶  $\#\mathcal{P}\mathbb{N}$  を  $2^{\aleph_0}$  とも書く。

集合  $A$  について、

- ▶ ある  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $\#A = n$  ならば、  
 $A$  を有限集合と呼ぶ。
- ▶  $A$  が有限集合でなければ、無限集合と呼ぶ。
- ▶  $\#A = \aleph_0$  ならば、  
 $A$  を可算無限集合と呼ぶ。
- ▶  $\#A = 2^{\aleph_0}$  ならば、  
 $A$  を連続無限集合と呼ぶ。

# 有限集合

集合  $A$  について、以下はすべて同値。

1. ある  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $\#A = n$
2.  $\#A < \aleph_0$
3.  $X \subset A$  かつ  $X \neq A$  である任意の集合  $X$  について、 $A$  から  $X$  への全射は存在しない。
4.  $X \subset A$  かつ  $X \neq A$  である任意の集合  $X$  について、 $A$  から  $X$  への全単射は存在しない。

# 有限集合

集合  $A$  について、以下はすべて同値。

1. ある  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $\#A = n$
2.  $\#A < \aleph_0$
3.  $X \subset A$  かつ  $X \neq A$  である任意の集合  $X$  について、 $A$  から  $X$  への全射は存在しない。
4.  $X \subset A$  かつ  $X \neq A$  である任意の集合  $X$  について、 $A$  から  $X$  への全単射は存在しない。

つまり、このいずれかを有限集合の定義に採用しても同じことになる。

# 有限集合

集合  $A$  について、以下はすべて同値。

1. ある  $n \in \mathbb{N}$  に対して  $\#A = n$
2.  $\#A < \aleph_0$
3.  $X \subset A$  かつ  $X \neq A$  である任意の集合  $X$  について、 $A$  から  $X$  への全射は存在しない。
4.  $X \subset A$  かつ  $X \neq A$  である任意の集合  $X$  について、 $A$  から  $X$  への全単射は存在しない。

証明は面倒なので略。

# 無限集合

集合  $A$  について、以下はすべて同値。

1. どの  $n \in \mathbb{N}$  についても  $\#A > n$
2.  $\#A \geq \aleph_0$
3.  $X \subset A$  かつ  $X \neq A$  である集合  $X$  が存在して、 $A$  から  $X$  への全射が存在する。
4.  $X \subset A$  かつ  $X \neq A$  である集合  $X$  に存在して、 $A$  から  $X$  への全単射が存在する。

# 無限集合

集合  $A$  について、以下はすべて同値。

1. どの  $n \in \mathbb{N}$  についても  $\#A > n$
2.  $\#A \geq \aleph_0$
3.  $X \subset A$  かつ  $X \neq A$  である集合  $X$  が存在して、 $A$  から  $X$  への全射が存在する。
4.  $X \subset A$  かつ  $X \neq A$  である集合  $X$  に存在して、 $A$  から  $X$  への全単射が存在する。

つまり、このいずれを無限集合の定義に採用しても同じことになる。

# 無限集合

集合  $A$  について、以下はすべて同値。

1. どの  $n \in \mathbb{N}$  についても  $\#A > n$
2.  $\#A \geq \aleph_0$
3.  $X \subset A$  かつ  $X \neq A$  である集合  $X$  が存在して、 $A$  から  $X$  への全射が存在する。
4.  $X \subset A$  かつ  $X \neq A$  である集合  $X$  に存在して、 $A$  から  $X$  への全単射が存在する。

証明は面倒なので略。

# カントールの定理

$$\#A < \#\mathcal{P}A$$

# カントールの定理

$$\#A < \#\mathcal{P}A$$

$\#A \leq \#\mathcal{P}A$  の証明

# カントールの定理

$$\#A < \#\mathcal{P}A$$

## $\#A \leq \#\mathcal{P}A$ の証明

$f: A \rightarrow \mathcal{P}A$  を  $f(x) = \{x\}$  で定めると、  
 $f$  は単射。

# カントールの定理

$$\#A < \#\mathcal{P}A$$

$\#A \neq \#\mathcal{P}A$  の証明

$f: A \rightarrow \mathcal{P}A$  を全射と仮定する。

# カントールの定理

$$\#A < \#\mathcal{P}A$$

**$\#A \neq \#\mathcal{P}A$  の証明**

$f: A \rightarrow \mathcal{P}A$  を全射と仮定する。

$X = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$  とおく。

# カントールの定理

$$\#A < \#\mathcal{P}A$$

## $\#A \neq \#\mathcal{P}A$ の証明

$f: A \rightarrow \mathcal{P}A$  を全射と仮定する。

$X = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$  とおく。

$f$  は全射なので、 $f(a) = X$  をみたす  $a \in A$  が存在する。

# カントールの定理

$$\#A < \#\mathcal{P}A$$

## $\#A \neq \#\mathcal{P}A$ の証明

$f: A \rightarrow \mathcal{P}A$  を全射と仮定する。

$X = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$  とおく。

$f$  は全射なので、 $f(a) = X$  をみたす  $a \in A$  が存在する。

$a \in X$  と仮定すると、 $X$  の定義より  $a \notin f(a)$  となり不都合。

$a \notin X$  と仮定すると、 $X$  の定義より  $a \in f(a)$  となり不都合。

# カントールの定理

$$\#A < \#\mathcal{P}A$$

## $\#A \neq \#\mathcal{P}A$ の証明

$f: A \rightarrow \mathcal{P}A$  を全射と仮定する。

$X = \{x \in A \mid x \notin f(x)\}$  とおく。

$f$  は全射なので、 $f(a) = X$  をみたす  $a \in A$  が存在する。

$a \in X$  と仮定すると、 $X$  の定義より  $a \notin f(a)$  となり不都合。

$a \notin X$  と仮定すると、 $X$  の定義より  $a \in f(a)$  となり不都合。

したがって、全射  $f: A \rightarrow \mathcal{P}A$  は存在しない。

# 数の体系と濃度

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$$

$$\#\mathbb{N} = \aleph_0$$

$$\#\mathbb{Z} = \aleph_0$$

$$\#\mathbb{Q} = \aleph_0$$

$$\#\mathbb{R} = 2^{\aleph_0}$$

$$\#\mathbb{C} = 2^{\aleph_0}$$

$$\#\mathbb{H} = 2^{\aleph_0}$$

$$\#\mathbb{O} = 2^{\aleph_0}$$

## 連続体仮説

$\aleph_0 < \#X < 2^{\aleph_0}$  をみたす集合  $X$  は存在するか？

「そのような集合  $X$  は存在しない」が連続体仮説と呼ばれている。

## 連続体仮説

$\aleph_0 < \#X < 2^{\aleph_0}$  をみたす集合  $X$  は存在するか？

「そのような集合  $X$  は存在しない」が連続体仮説と呼ばれている。

現在の標準的な集合論では、存在することも存在しないことも証明できないことが証明されている。

## 補足：記法と用語に関する注意

**集合の濃度**  $\#A$  のかわりに  $|A|$  と書く流儀もあり、そのほうが流行っている。  $\text{card}(A)$  と書く流儀もある。  $\bar{A}$  と書く流儀もあったが、今ではほとんど見ない。

**可算無限**  $\aleph_0$  を  $\alpha$  と書くこともある。

**連続無限**  $2^{\aleph_0}$  を  $c$  と書くこともある。

- ▶  $\aleph$  はヘブライ文字の第一文字
- ▶  $\alpha$  と  $c$  は、それぞれ、 $a$  と  $c$  のフラクトゥール。  
フラクトゥールはかつてドイツなどで用いられた書体。
- ▶  $\aleph_0$  の読み方には、
  - ▶ aleph zero
  - ▶ aleph null
  - ▶ aleph noughtがある。

**ベルンシュタインの定理** 発見の経緯が複雑なため、人名のついたさまざまな別名がある。

# まとめ

- ▶ 集合の濃度の相等の定義
- ▶ 集合の濃度の大小の定義
- ▶ 集合の濃度のさまざまな性質
- ▶ 有限集合・無限集合
- ▶ 可算無限集合
- ▶ 連続無限集合
- ▶ 連続体仮説