問題 1. 以下の例をそれぞれあげよ。

(i) 全単射 $f : \mathbb{N} \setminus \{0\} \to \mathbb{N}$
(ii) 全単射 $f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
(iii) 全単射 $f : \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a < b\} \to \mathbb{N}$
(iv) 全単射 $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

問題 2. 写像 $f : X \to Y$, $g : Y \to Z$ についての以下のそれぞれの問について、正しければ証明し、正しくなければ反例をあげよ。

(i) f も g も全射のとき、$g \circ f$ は全射か？
(ii) f も g も単射のとき、$g \circ f$ は単射か？
(iii) $g \circ f$ が全射のとき、f は全射か？
(iv) $g \circ f$ が全射のとき、g は全射か？
(v) $g \circ f$ が単射のとき、f は単射か？
(vi) $g \circ f$ が単射のとき、g は単射か？

問題 3. $\mathbb{R}^3$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定義する。

$$(x_1, x_2, x_3) \sim (y_1, y_2, y_3) \iff x_1 - y_1 \in \mathbb{Z} \text{ かつ } x_2 - y_2 \in \mathbb{Z} \text{ かつ } x_3 - y_3 \in \mathbb{Z}$$

(1) $\sim$ は同値関係であることを示せ。
(2) 任意の $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ に対して、ある $(a_1, a_2, a_3) \in [0, 1)^3$ が存在して、$(x_1, x_2, x_3) \sim (a_1, a_2, a_3)$ が成り立つことを示せ。

問題 4. 以下の命題論理式について、それぞれ、真理値表を書け。

(i) $(X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee Z$
(ii) $(X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z)$
(iii) $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Z)$
(iv) $(X \Rightarrow Y) \wedge (\neg X \Rightarrow \neg Z)$
(v) $((X \Rightarrow Y) \Rightarrow X) \Rightarrow X$

問題 5. 以下の日本語で書かれた記述を述語論理式で書け。ただし、以下の制約がある。

- 変数は自然数 (0 を含む) 全体を動くものとする。
- 使える記号は、論理記号の他には 0, 1, 2, 3, ... （具体的な自然数値）、$+$ （足し算）、$\cdot$ （掛け算）、$=$ （等号）、$<$ （不等号）のみとする。（引き算記号と割り算記号は使わない。$\neq$, $>$, $\leq$, $\geq$ も使わない）

(i) すべての自然数は 0 の約数である。
(ii) 0 の倍数は 0 だけである。
(iii) 2 と 3 を除く素数は、6 で割った余りは 1 か 5 である。
(iv) 2 より大きなすべての偶数は 2 個の素数の和で表すことができる。
(v) 任意の正の整数 n に対して、ある素数 p が存在して、$n < p \leq 2n$ をみたす。

おまけ問題 1. 好きな数学の定理を一つ選び、どこが好きかを熱く語れ。離散数学でなくとも良い。