

**問題 1.**  $a$  は実数とする。写像  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  が全単射となる  $a$  の範囲を、 $f$  を以下のそれぞれで定義した場合に、それぞれ、求めよ。

(i)  $f(x) = ax + 1$

(ii)  $f(x) = x^3 - x^2 + ax$

(iii)  $f(x) = e^x + ax$

(iv)  $f(x) = ax + \sin x$

**問題 2.** 写像  $f: X \rightarrow Y, g: Y \rightarrow Z$  についての以下のそれぞれの問について、正しければ証明し、正しくなければ反例をあげよ。

(i)  $f$  も  $g$  も全射のとき、 $g \circ f$  は全射か？

(ii)  $f$  も  $g$  も単射のとき、 $g \circ f$  は単射か？

(iii)  $g \circ f$  が全射のとき、 $f$  は全射か？

(iv)  $g \circ f$  が全射のとき、 $g$  は全射か？

(v)  $g \circ f$  が単射のとき、 $f$  は単射か？

(vi)  $g \circ f$  が単射のとき、 $g$  は単射か？

**問題 3.** 集合  $U$  とその部分集合  $A$  が与えられているものとする。冪集合  $\mathcal{P}U$  上の二項関係  $\sim$  を以下のよう

に定義する。

$$X \sim Y \iff X \setminus A \subset Y \text{ かつ } X \cup A \supset Y$$

(1)  $\sim$  は同値関係であることを示せ。

(2)  $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ ,  $A = \{0, 1\}$  のとき、 $\{1, 2, 3\}$  が属する同値類を列挙で書け。

**問題 4.**  $(L_1, \sqsubseteq_1)$  と  $(L_2, \sqsubseteq_2)$  は半順序集合で、 $L_1 \cap L_2 = \emptyset$  が成り立つとする。

集合  $L'$  を

$$L' = L_1 \cup L_2$$

で定め、 $L'$  上の二項関係  $\sqsubseteq'$  を、

$$x \sqsubseteq' y \iff \text{「}x, y \in L_1 \text{ かつ } x \sqsubseteq_1 y\text{」 または 「}x, y \in L_2 \text{ かつ } x \sqsubseteq_2 y\text{」 または 「}x \in L_1 \text{ かつ } y \in L_2\text{」}$$

で定める。

(1)  $(L', \sqsubseteq')$  も半順序集合であることを示せ。

(2)  $L_1 = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ ,  $L_2 = \{1, 3, 5, 15\}$  で、

$$x \sqsubseteq_1 y \iff (\text{自然数として}) x \leq y$$

$$x \sqsubseteq_2 y \iff x \text{ は } y \text{ の約数である}$$

とする。以下のそれぞれの集合を列挙で書け。

(i)  $\{x \in L' \mid x \sqsubseteq' 4\}$

(ii)  $\{x \in L' \mid x \sqsubseteq' 5\}$

(iii)  $\{x \in L' \mid 4 \sqsubseteq' x\}$

(iv)  $\{x \in L' \mid 5 \sqsubseteq' x\}$

問題 5. 以下の命題論理式について、それぞれ、真理値表を書け。

- (i)  $(X \wedge \neg Y) \vee (\neg X \wedge Y) \vee Z$
- (ii)  $(X \vee Y \vee Z) \wedge (\neg X \vee \neg Y \vee Z)$
- (iii)  $(X \wedge Y) \vee (\neg X \wedge \neg Z)$
- (iv)  $(X \Rightarrow Y) \wedge (\neg X \Rightarrow \neg Z)$
- (v)  $((X \Rightarrow Y) \Rightarrow X) \Rightarrow X$

問題 6. 以下の日本語で書かれた記述を述語論理式で書け。ただし、以下の制約がある。

- 変数は自然数 (0 を含む) 全体を動くものとする。
  - 使える記号は、論理記号の他には 0, 1, 2, 3, ... (具体的な自然数値)、+ (足し算)、 $\cdot$  (掛け算)、= (等号)、 $<$  (不等号) のみとする。(引き算記号と割り算記号は使わない。 $\neq, >, \leq, \geq$  も使わない)
- (i) 3 で割って 1 余る自然数を 9 で割った余りは 1 か 4 か 7 である。
  - (ii) 0 の倍数は 0 だけである。  
ヒント 「0 は 0 の倍数であり、0 以外は 0 の倍数でない」と書き直せば良い。
  - (iii)  $m$  と  $n$  は互いに素である。  
ヒント 二つの自然数が互いに素であるとは、それらの公約数 (共通の約数) が 1 だけであることである。
  - (iv) (チェビシエフの定理)  $n$  が 1 より大きな整数ならば、 $n$  より大きく  $2n$  より小さな素数が 1 個以上存在する。
  - (v) 最大の素数は存在しない。

**おまけ問題 1.** 好きな数学の定理を一つ選び、どこが好きかを熱く語れ。離散数学でなくとも良い。