離散数学 資料 6
同値関係

鴨 浩靖

2020 年 11 月 24 日 初版
2022 年 3 月 30 日 微修正

関係

（復習）この講義では、集合 A と集合 B の間の二項関係とは、直積集合 $A \times B$ の部分集合のこととする。
すなわち、$R \subset A \times B$

以後、A と A の間の二項関係を A 上の二項関係と呼ぶ。

$(x, y) \in R$ を $x\, R\, y$ と書く。

同値関係

集合 A 上の二項関係 $\sim$ が以下の三条件をみたすとき、
$\sim$ を A 上の同値関係と呼ぶ。

反射律 $x \sim x$

対称律 $x \sim y$ ならば $y \sim x$

推移律 $x \sim y$ かつ $y \sim z$ ならば $x \sim z$

例

$\mathbb{Z}$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定めると、
$\sim$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係となる。

$$m \sim n \overset{\text{def}}{\iff} m - n \text{ は } 7 \text{ の倍数}$$

例

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定めると、
$\sim$ は $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 上の同値関係となる。

$$(m, n) \sim (p, q) \overset{\text{def}}{\iff} m + q = n + p$$

例

集合 A 上の同値関係 $\sim_A$ と集合 B 上の同値関係 $\sim_B$ に対して
$A \times B$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定めると、
$\sim$ は $A \times B$ 上の同値関係となる。

$$(x, y) \sim (x', y') \overset{\text{def}}{\iff} x \sim_A x' \text{ かつ } y \sim_B y'$$

例

集合 A と B は $A \cap B = \varnothing$ をみたしているとする。
A 上の同値関係 $\sim_A$ と B 上の同値関係 $\sim_B$ に対して
$A \cup B$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定めると、
$\sim$ は $A \cup B$ 上の同値関係となる。

$$
\begin{aligned}
x \sim x' \overset{\text{def}}{\iff} & \quad x, x' \in A \text{ かつ } x \sim_A x' \\
\text{または} & \quad x, x' \in B \text{ かつ } x \sim_B x'
\end{aligned}
$$

例

集合 A 上の二つの同値関係 $\sim_1$ と $\sim_2$ に対して、
A 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定めると、
$\sim$ も A 上の同値関係となる。

$$x \sim x' \overset{\text{def}}{\iff} x \sim_1 x' \text{ かつ } x \sim_2 x'$$

例

集合 A 上の二項関係 $\sim$ が対称律と推移律をみたしているとする。
（反射律はみたしていないかもしれない。）
集合 A' 上の二項関係 $\sim'$ を以下のように定めると、
$\sim'$ は A' 上の同値関係となる。

$$A' \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x \sim x\}$$

$$x \sim' y \stackrel{\text{def}}{\iff} x \sim y$$

例

集合 A 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定めると、
$\sim$ は A 上の同値関係となる。

$$x \sim x' \overset{\text{def}}{\iff} x = x'$$

例

集合 A 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定めると、
$\sim$ は A 上の同値関係となる。

$$\text{常に } x \sim x'$$

例

集合 A とその部分集合 B に対して
$\mathscr{P}A$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定めると、
$\sim$ は $\mathscr{P}A$ 上の同値関係となる。

$$X \sim Y \overset{\text{def}}{\iff} X \setminus Y \subset B \text{ かつ } Y \setminus X \subset B$$

例

集合 A に対して
$\mathscr{P}A$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定めると、
$\sim$ は $\mathscr{P}A$ 上の同値関係となる。

$$X \sim Y \overset{\text{def}}{\iff} \#(X \setminus Y) < \aleph_0 \text{ かつ } \#(Y \setminus X) < \aleph_0$$