離散数学 資料 7
同値類と商集合

鴨 浩靖

2020 年 12 月 1 日 初版
2021 年 12 月 7 日 第二版
2024 年 12 月 10 日 第三版

商集合の気持ち

- 同値関係は「ある基準で同じ」な気持ちの関係
  - $\rightsquigarrow$ 同じものは同一視したい
  - $\rightsquigarrow$ 集合 A から同値関係 $\sim$ が成り立つものを同一視して得られる集合 $A/\sim$ を考えたい
  - $\rightsquigarrow$ これを集合の言葉で表現したい
- これを実現するのが**商集合**

同値関係（復習）

集合 A 上の二項関係 $\sim$ が以下の三条件をみたすとき、
$\sim$ を A 上の同値関係と呼ぶ。

- **反射律** $x \sim x$
- **対称律** $x \sim y$ ならば $y \sim x$
- **推移律** $x \sim y$ かつ $y \sim z$　ならば　$x \sim z$

同値類

集合 A 上の同値関係 $\sim$ と $a \in A$ について、

$$[a]_\sim \overset{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x \sim a\}$$

と定義し、$[a]_\sim$ を a の**同値類**と呼ぶ。

同値類

集合 A 上の同値関係 $\sim$ と $a \in A$ について、

$$[a]_\sim \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in A \mid x \sim a\}$$

と定義し、$[a]_\sim$ を a の**同値類**と呼ぶ。

$\sim$ が文脈から明らかなときは、
$[a]_\sim$ を $[a]$ と略すこともある。

同値類の基本的な性質 (1)

$$x \in [a]_{\sim} \iff x \sim a$$

証明.

定義そのもの。 $\square$

同値類の基本的な性質 (2)

$$a \in [a]_\sim$$

証明.

$$a \in [a]_\sim \iff a \sim a$$

だが、右辺は反射律。 $\square$

同値類の基本的な性質 (3)

$$a \sim b \iff [a]_\sim = [b]_\sim$$

証明.

(⇒)

(⇐)

□

同値類の基本的な性質 (3)

$$a \sim b \iff [a]_\sim = [b]_\sim$$

証明.

$(\Rightarrow)$

- $a \sim b$ と仮定する。
- $x \in [a]_\sim$ ならば $x \sim a$ が成り立つ。推移律より、$x \sim b$ が成り立つ。すなわち、$x \in [b]_\sim$ が成り立つ。したがって、$[a]_\sim \subset [b]_\sim$ が成り立つ。
- 対称律より $b \sim a$ が成り立つことから、同様に、$[b]_\sim \subset [a]_\sim$ が成り立つ。
- ゆえに、$[a]_\sim = [b]_\sim$

$(\Leftarrow)$

□

同値類の基本的な性質 (3)

$$a \sim b \iff [a]_\sim = [b]_\sim$$

証明.

(⇒)

(⇐)

- $[a]_\sim = [b]_\sim$ を仮定する。
- $a \in [a]_\sim$ より、$a \in [b]_\sim$ が成り立つ。
- すなわち、$a \sim b$ が成り立つ。

□

同値類の基本的な性質 (4)

$$[a]_\sim \cap [b]_\sim \neq \emptyset \quad \text{ならば} \quad [a]_\sim = [b]_\sim$$

証明.

- $x \in [a]_\sim \cap [b]_\sim$ と仮定する。
- $x \sim a$ かつ $x \sim b$ が成り立つ。
- 対象律と推移律より $a \sim b$ が成り立つ。

□

同値類の基本的な性質 (5)

$$[a]_\sim = [b]_\sim \quad \text{または} \quad [a]_\sim \cap [b]_\sim = \emptyset$$

証明.

さきほどの基本的な性質 (4) の言い換え。 $\square$

商集合

集合 A とその上の同値関係 $\sim$ に対して、
商集合 $A/{\sim}$ を以下のように定義する。

$$A/{\sim} \overset{\text{def}}{=} \{[a]_{\sim} \mid a \in A\}$$

商集合の基本的な性質

商集合 $A/\sim$ は以下の性質をもつ

1. $\varnothing \notin A/\sim$
2. 任意の $x \in A$ に対して、ある $X \in A/\sim$ が存在して、$x \in X$ が成り立つ。
3. $X, X' \in A/\sim$　ならば　$X = X'$ または $X \cap X' = \varnothing$

商集合の基本的な性質

商集合 $A/\sim$ は以下の性質をもつ

1. $\varnothing \notin A/\sim$

証明.

$X \in A/\sim$ ならば、ある $a \in A$ が存在して、$X = [a]$ である。
$a \in [a]$ より、$X \neq \varnothing$ である。 $\square$

商集合の基本的な性質

商集合 $A/\sim$ は以下の性質をもつ

2. 任意の $x \in A$ に対して、ある $X \in A/\sim$ が存在して、$x \in X$ が成り立つ。

証明.

$x \in A$ ならば、$[x] \in A/\sim$ である。
$x \in [x]$ なので、$X = [x]$ とするとよい。 □

商集合の基本的な性質

商集合 $A/\sim$ は以下の性質をもつ

3. $X, X' \in A/\sim$　ならば　$X = X'$ または $X \cap X' = \emptyset$

証明.
先程の同値類の基本的な性質 (5) の言い換え。 □

類別

集合 A に対して、$\tilde{A} \subset \mathscr{P}A$ が以下の性質をもつとき、
$\tilde{A}$ を A の類別と呼ぶ。

1. $\emptyset \notin \tilde{A}$
2. 任意の $x \in A$ に対して、ある $X \in \tilde{A}$ が存在して、$x \in X$ が成り立つ。
3. $X, X' \in \tilde{A}$　ならば　$X = X'$ または $X \cap X' = \emptyset$

類別と商集合

- 商集合 $A/\sim$ は A の類別である。
- $\tilde{A}$ が A の類別ならば、ある同値関係 $\sim$ が存在して $\tilde{A} = A/\sim$ が成り立つ。

類別と商集合

- 商集合 $A/\sim$ は A の類別である。

同値類の基本的な性質からすぐに導かれる。

類別と商集合

- $\tilde{A}$ が A の類別ならば、ある同値関係 $\sim$ が存在して $\tilde{A} = A/\sim$ が成り立つ。

$$x \sim y \iff \text{ある } X \in \tilde{A} \text{ が存在して } x \in X \text{ かつ } y \in X$$

とすればよい。

商集合上の写像

集合 A, B とそれぞれ上の同値関係 $\sim_A$ と $\sim_B$ について、
写像 $f : A \to B$ が常に

$$x \sim_A x' \quad \text{ならば} \quad f(x) \sim_B f(x')$$

をみたすならば、写像 $\tilde{f} : A/{\sim_A} \to B/{\sim_B}$ を

$$\tilde{f}([x]_{\sim_A}) = [f(x)]_{\sim_B}$$

で定義できる。
つまり、$[a] = [a']$ ならば $\tilde{f}([a]) = \tilde{f}([a'])$ が成り立つ。

商集合上の写像

集合 A, B とそれぞれ上の同値関係 $\sim_A$ と $\sim_B$ について、
写像 $f : A \to B$ が常に

$$x \sim_A x' \quad \text{ならば} \quad f(x) \sim_B f(x')$$

をみたすならば、写像 $\tilde{f} : A/{\sim_A} \to B/{\sim_B}$ を

$$\tilde{f}([x]_{\sim_A}) = [f(x)]_{\sim_B}$$

で定義できる。
つまり、$[a] = [a']$ ならば $\tilde{f}([a]) = \tilde{f}([a'])$ が成り立つ。
多変数の写像 $A_1 \times \cdots \times A_n \to B$ でも同様。

商集合上の関係

集合 A, B とそれぞれ上の同値関係 $\sim_A$ と $\sim_B$ について、A と B の間の二項関係 R が常に

$$x \sim_A x' \text{ かつ } y \sim_B y' \quad \text{ならば} \quad [R(x,y) \Leftrightarrow R(x',y')]$$

をみたすならば、$A/{\sim_A}$ と $B/{\sim_B}$ の間の二項関係 $\tilde{R}$ を

$$\tilde{R}([x]_{\sim_A}, [y]_{\sim_B}) \overset{\text{def}}{\iff} R(x,y)$$

で定義できる。

商集合上の関係

集合 A, B とそれぞれ上の同値関係 $\sim_A$ と $\sim_B$ について、A と B の間の二項関係 R が常に

$$x \sim_A x' \text{ かつ } y \sim_B y' \quad \text{ならば} \quad [R(x,y) \Leftrightarrow R(x',y')]$$

をみたすならば、$A/{\sim_A}$ と $B/{\sim_B}$ の間の二項関係 $\tilde{R}$ を

$$\tilde{R}([x]_{\sim_A}, [y]_{\sim_B}) \overset{\text{def}}{\iff} R(x,y)$$

で定義できる。
一般の n 項関係でも同様。

例

$\mathbb{Z}$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定めると、
$\sim$ は $\mathbb{Z}$ 上の同値関係となる。

$$m \sim n \overset{\text{def}}{\iff} m - n \text{ は } 7 \text{ の倍数}$$

このとき、

$$\mathbb{Z}/\sim = \{[0], [1], [2], [3], [4], [5], [6]\}$$

$$[3] \tilde{+} [6] = [2]$$

$$[3] \tilde{\cdot} [6] = [4]$$

例

集合 A 上の同値関係 $\sim_A$ と集合 B 上の同値関係 $\sim_B$ に対して
$A \times B$ 上の二項関係 $\sim$ を以下のように定めると、
$\sim$ は $A \times B$ 上の同値関係となる。

$$(x, y) \sim (x', y') \overset{\text{def}}{\iff} x \sim_A x' \text{ かつ } y \sim_B y'$$

このとき、

$$[(a, b)]_{\sim} = [a]_{\sim_A} \times [b]_{\sim_B}$$

まとめ

- 同値類
- 商集合
- 類別
- 商集合上の写像
- 商集合上の関係