離散数学 資料 3
写像

鴨 浩靖

2017 年 10 月 26 日 初版
2018 年 11 月 16 日 第二版
2018 年 10 月 5 日 第三版
2018 年 10 月 20 日 第四版
2021 年 10 月 27 日 第四版改訂版

写像

A, B を集合とする。
A の各々の要素に B の要素をちょうど一つ対応させる対応 f があるとき、
f を A から B への写像と呼び、
$f : A \to B$ と書く。

A を f の定義域という。
B を f の終域という。余域ともいう。

一部の写像は関数と呼ばれることもある。
どのような写像を関数と呼ぶかは、特に決まっていない。

記法

「f による a の像は b である」

$$f(a) = b$$

$$f : a \mapsto b$$

$$a \overset{f}{\mapsto} b$$

写像の相等

$f, g : A \to B$ について、

$$f = g \overset{\text{def}}{\iff} \text{任意の } x \in A \text{ について } f(x) = g(x)$$

写像の相等

$f, g : A \to B$ について、

$$f = g \overset{\text{def}}{\iff} \text{任意の } x \in A \text{ について } f(x) = g(x)$$

例

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$f(x) = (2x+1)^2, \qquad g(x) = 4x^2 + 4x + 1$$

で定められるとき、$f = g$ が成り立つ。

写像の相等

$f, g : A \to B$ について、

$$f = g \overset{\text{def}}{\iff} \text{任意の } x \in A \text{ について } f(x) = g(x)$$

例

$f, g : \{0, 1\} \to \{0, 1\}$ が

$$f(x) = 1 - x, \qquad g(x) = \cos \frac{\pi}{2} x$$

で定められるとき、$f = g$ が成り立つ。

恒等写像

$\mathrm{id}_A : A \to A$
任意の $a \in A$ について $\mathrm{id}_A(a) = a$

写像の合成

$f : A \to B, \quad g : B \to C$ とする。
f と g の合成 $g \circ f : A \to C$ は、任意の $x \in A$ について

$$(g \circ f)(x) = g(f(x))$$

となる写像とする。

最近は $f; g$ と書く流儀もあるが、まだ、流行っていない。

写像の合成

例

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad g(x) = 2x + 1$$

で定められるとき、

$$(g \circ f)(x) = 2x^2 + 1$$
$$(f \circ g)(x) = 4x^2 + 4x + 1$$

$\because$

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad g(x) = 2x + 1$$

から計算するだけ。

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x) &= g(f(x)) \\ &= g(x^2) \\ &= 2x^2 + 1\end{aligned} \qquad \begin{aligned}(f \circ g)(x) &= f(g(x)) \\ &= f(2x + 1) \\ &= (2x + 1)^2 \\ &= 4x^2 + 4x + 1\end{aligned}$$

合成の結合則

$f : A \to B, \quad g : B \to C, \quad h : C \to D$ について、以下が成り立つ。

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$

合成の結合則

証明.

任意の $x \in A$ について、

$$
\begin{aligned}
(h \circ (g \circ f))(x) &= h((g \circ f)(x)) \\
&= h(g(f(x)))
\end{aligned}
$$

一方、

$$
\begin{aligned}
((h \circ g) \circ f)(x) &= (h \circ g)(f(x)) \\
&= h(g(f(x)))
\end{aligned}
$$

□

恒等写像と合成

$f : A \to B$ に対して、以下が成り立つ。

$$f \circ \mathrm{id}_A = \mathrm{id}_B \circ f = f$$

恒等写像と合成

証明.

任意の $x \in A$ について、

$$\begin{aligned}(f \circ \mathrm{id}_A)(x) &= f(\mathrm{id}_A(x)) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

一方、

$$\begin{aligned}(\mathrm{id}_B \circ f)(x) &= \mathrm{id}_B(f(x)) \\ &= f(x)\end{aligned}$$

□

全射

$f : A \to B$

f は全射

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $y \in B$ に対して、ある $x \in A$ が存在して、$f(x) = y$

全射

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad g(x) = 2x + 1$$

で定められるとき、

- f は全射でない
- g は全射である

全射

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad g(x) = 2x + 1$$

で定められるとき、

- f は全射でない

  $f(x) = -1$ となる $x \in \mathbb{R}$ は存在しない。

- g は全射である

全射

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad g(x) = 2x + 1$$

で定められるとき、

- f は全射でない
- g は全射である

$$g\left(\frac{y-1}{2}\right) = y$$

単射

$f : A \to B$

f は単射

$\overset{\text{def}}{\iff}$ 任意の $x, x' \in A$ について、$x \neq x'$ ならば $f(x) \neq f(x')$

$\iff$ 任意の $x, x' \in A$ について、$f(x) = f(x')$ ならば $x = x'$

単射

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad g(x) = 2x + 1$$

で定められるとき、

- f は単射でない
- g は単射である

単射

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad g(x) = 2x + 1$$

で定められるとき、

- f は単射でない
  $$f(-1) = f(1) = 1$$
- g は単射である

単射

$f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ が

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad g(x) = 2x + 1$$

で定められるとき、

- f は単射でない
- g は単射である

$$g(x) = g(x') \iff 2x + 1 = 2x' + 1 \implies x = x'$$

全単射

$f : A \to B$

$$
\begin{aligned}
&f \text{ は全単射} \\
\overset{\text{def}}{\iff}\ &f \text{ は全射、かつ、} f \text{ は単射}
\end{aligned}
$$

像

$f : A \to B, \quad X \subset A$ とする。
f による X の像 $f(X)$

$$\begin{aligned} f(X) &\overset{\text{def}}{=} \{y \in B \mid \text{ある } x \in X \text{ が存在して } f(x) = y\} \\ &= \{f(x) \mid x \in X\} \end{aligned}$$

紛らわしさを避けて、$f[X]$ と書くこともある。

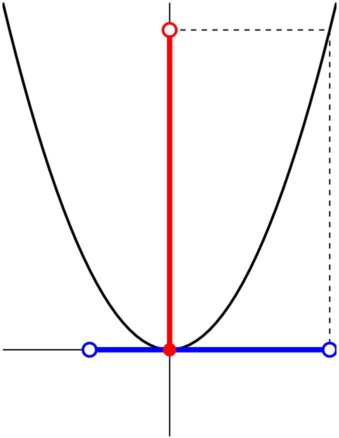
像

例

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^2$$
$$I = (-1, 2)$$

のとき、

$$f(I) = [0, 4)$$



逆像（原像）

$f : A \to B, \quad Y \subset B$ とする。
f による Y の逆像 $f^{-1}(Y)$

$$\begin{aligned} f^{-1}(Y) &\overset{\text{def}}{=} \{x \in A \mid \text{ある } y \in Y \text{ が存在して } f(x) = y\} \\ &= \{x \in A \mid f(x) \in Y\} \end{aligned}$$

原像ともいう。

紛らわしさを避けて、$f^{-1}[Y]$ と書くこともある。

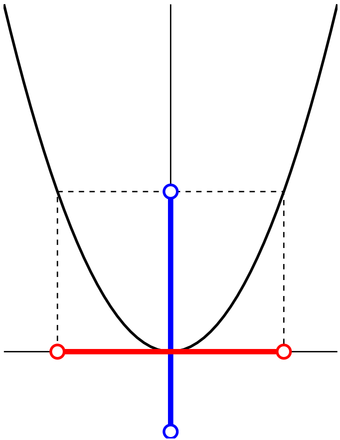
逆像（原像）

例

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$f(x) = x^2$$
$$I = (-1, 2)$$

のとき、

$$f^{-1}(I) = (-\sqrt{2}, \sqrt{2})$$



空集合

要素を持たない集合。列挙で書くと $\{\}$ の形の集合。
すなわち、要素がちょうど零個の集合。

一点集合

$\{a\}$ の形の集合。
すなわち、要素がちょうど一個の集合。

逆像による特徴づけ

f は全射 $\iff$ 一点集合の f による逆像は決して空集合でない

f は単射 $\iff$ 一点集合の f による逆像は必ず空集合か一点集合

f は全単射 $\iff$ 一点集合の f による逆像は常に一点集合

逆像による特徴づけ

全射についての証明

$$
\begin{aligned}
& f : A \to \text{は全射} \\
\iff & \text{任意の } y \in B \text{ に対して、ある } x \in A \text{ が存在して、} f(x) = y \\
\iff & \text{任意の } y \in B \text{ に対して、ある } x \in A \text{ が存在して、} x \in f^{-1}(\{y\}) \\
\iff & \text{任意の } y \in B \text{ に対して、} f^{-1}(\{y\}) \text{ は空集合でない。}
\end{aligned}
$$

逆像による特徴づけ

単射についての証明 [1/2]

$f : A \to B$ は単射と仮定。

$$
\begin{aligned}
& x \in f^{-1}(\{y\}) \text{ かつ } x' \in f^{-1}(\{y\}) \\
\iff & f(x) \in \{y\} \text{ かつ } f(x') \in \{y\} \\
\iff & f(x) = y \text{ かつ } f(x') = y \\
\implies & f(x) = f(x') \\
\implies & x = x'
\end{aligned}
$$

したがって、$f^{-1}(\{y\})$ は一点集合か空集合

逆像による特徴づけ

単射についての証明 [2/2]

$f: A \to B$ について、一点集合の f による逆像は常に空集合または一点集合であると仮定する。
任意の $x \in A$ について $f^{-1}(\{f(x)\})$ は空集合または一点集合であるが、$x \in f^{-1}(\{f(x)\})$ であることから、$f^{-1}(\{f(x)\}) = \{x\}$ である。
したがって、

$$
\begin{aligned}
& f(x) = f(x') \\
\Longrightarrow\ & f^{-1}(\{f(x)\}) = f^{-1}(\{f(x')\}) \\
\Longleftrightarrow\ & \{x\} = \{x'\} \\
\Longleftrightarrow\ & x = x'
\end{aligned}
$$

逆写像

$f : A \to B$ が全単射であるとする。
逆写像 $f^{-1} : B \to A$ を

$$f^{-1}(y) = x \iff f(x) = y$$

で定義する。

逆写像

$f : A \to B$ が全単射であるとする。

$$f^{-1}(y) = x \iff f^{-1}(\{y\}) = \{x\}$$

逆写像の性質 (1)

恒等写像 $\mathrm{id}_A : A \to A$ は全単射である。

さらに、
$$
{\mathrm{id}_A}^{-1} = \mathrm{id}_A
$$

逆写像の性質 (3)

$f : A \to B$ が全単射とする。

逆写像 $f^{-1} : B \to A$ も全単射である。

さらに、

$$(f^{-1})^{-1} = f$$

逆写像の性質 (4)

$f : A \to B$, $g : B \to C$ がともに全単射とする。

合成写像 $g \circ f : A \to C$ も全単射である。

さらに、

$$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$$

多変数の写像

二変数の写像は、定義域を直積集合とすると考える。
$f : A \times B \to C$ など
通常、$f((x, y))$ は $f(x, y)$ と略記する。

三変数以上も同様。

写像のグラフ

$f : A \to B$ とする。
$A \times B$ の部分集合

$$\{(x, f(x)) \mid x \in A\}$$

を f のグラフという。

部分写像

A, B を集合とする。
f が A の部分集合 X から B への写像のとき、
f を A から B への部分写像とも呼び、
この授業では $f : A \rightharpoonup B$ と書く。

このとき、X を f の定義域と呼び、
この授業では $\operatorname{dom} f$ と書く。

全域写像

写像 $f : A \to B$ は部分写像で特に $\operatorname{dom} f = A$ の場合とみなすこともできる。
このことを意識する場合は、写像を全域写像ともいう。

まとめ

- 写像
- 写像の合成
- 恒等写像
- 全射・単射・全単射
- 像・逆像（原像）
- 逆写像
- 多変数の写像
- 写像のグラフ
- 部分写像