

離散数学 資料 8

順序

鴨 浩靖

2019年2月8日 初版
2020年12月7日 第二版
2020年12月8日 微修正
2022年3月30日 微修正

擬順序

集合 A 上の二項関係 \sqsubseteq が、 A の任意の要素について以下の二条件をみたす時、 \sqsubseteq を A 上の擬順序という。

反射律 $x \sqsubseteq x$

推移律 $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq z$ ならば $x \sqsubseteq z$

(A, \sqsubseteq) は擬順序集合であるともいう。

A は \sqsubseteq で擬順序集合となるともいう。

半順序

集合 A 上の二項関係 \sqsubseteq が、 A の任意の要素について以下の三条件をみたす時、 \sqsubseteq を A 上の半順序という。

反射律 $x \sqsubseteq x$

反対称律 $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq x$ ならば $x = y$

推移律 $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq z$ ならば $x \sqsubseteq z$

(A, \sqsubseteq) は半順序集合であるともいう。

A は \sqsubseteq で半順序集合となるともいう。

全順序

集合 A 上の二項関係 \sqsubseteq が、 A の任意の要素について以下の四条件をみたす時、 \sqsubseteq を A 上の**全順序**という。

反射律 $x \sqsubseteq x$

反対称律 $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq x$ ならば $x = y$

推移律 $x \sqsubseteq y$ かつ $y \sqsubseteq z$ ならば $x \sqsubseteq z$

全順序性 $x \sqsubseteq y$ または $y \sqsubseteq x$

(A, \sqsubseteq) は**全順序集合**であるともいう。

A は \sqsubseteq で**全順序集合**となるともいう。

例：大小関係

- ▶ \mathbb{N} 上の大小関係 \leq は全順序である。
- ▶ \mathbb{Z} 上の大小関係 \leq は全順序である。
- ▶ \mathbb{Q} 上の大小関係 \leq は全順序である。
- ▶ \mathbb{R} 上の大小関係 \leq は全順序である。

例：整除関係

- ▶ \mathbb{N} 上の整除関係は半順序であるが、全順序ではない。
 - ▶ 3 は 8 で割り切れないし、8 は 3 で割り切れない。
- ▶ \mathbb{Z} 上の整除関係は擬順序であるが、半順序ではない。
 - ▶ -3 は 3 で割り切れ、3 は -3 で割り切れるが、 $3 \neq -3$ である。

例：包含関係

X を任意の集合とする。

- ▶ 冪集合 $\mathcal{P}X$ 上の包含関係 \subset は半順序であるが、 $\#X \geq 2$ のときは全順序ではない。

上界・下界

(L, \sqsubseteq) を半順序集合とする。

$X \subset L$ と $a \in L$ について以下が成り立つとき、 a は X の上界であるという。

- ▶ 任意の $x \in X$ について $x \sqsubseteq a$ が成り立つ。

$X \subset L$ と $a \in L$ について以下が成り立つとき、 a は X の下界であるという。

- ▶ 任意の $x \in X$ について $a \sqsubseteq x$ が成り立つ。

上限・下限

(L, \sqsubseteq) を半順序集合とする。

$X \subset L$ と $a \in L$ について以下が成り立つとき、 a は X の上限であるという。

1. a は X の上界である。
2. X の任意の上界 b に対して $a \sqsubseteq b$ が成り立つ。

$X \subset L$ と $a \in L$ について以下が成り立つとき、 a は X の下限であるという。

1. a は X の下界である。
2. X の任意の下界 b に対して $b \sqsubseteq a$ が成り立つ。

上限・下限

個数

(L, \sqsubseteq) を半順序集合とする。

任意の部分集合 $X \subset L$ に対して、

- ▶ X の上限は多くとも一つ存在する。
- ▶ X の下限は多くとも一つ存在する。

a と a' が X の上限であるとする。上限の定義より、 $a \sqsubseteq a'$ かつ $a' \sqsubseteq a$ が成り立つ。反対称律より、 $a = a'$ が成り立つ。

最大元・最小元

(L, \sqsubseteq) を半順序集合とする。

以下の 2 条件は同値である。

1. L の上限が存在する。
2. \emptyset の下限が存在する。

存在するとき、それらは等しい。その元を L の**最大元**と呼ぶ。
 L の任意の元は \emptyset の下界であることに注意。

以下の 2 条件は同値である。

1. L の下限が存在する。
2. \emptyset の上限が存在する。

存在するとき、それらは等しい。その元を L の**最小元**と呼ぶ。
 L の任意の元は \emptyset の下界であることに注意。

双対順序

- ▶ A 上の擬順序 \sqsubseteq に対して、 A 上の二項関係 \supseteq を

$$x \supseteq y \iff y \sqsubseteq x$$

で定めると、 \supseteq も A 上の擬順序となる。このとき、 \supseteq を \sqsubseteq の**双対順序**と呼ぶ。

- ▶ A 上の半順序 \sqsubseteq に対して、 A 上の二項関係 \supseteq を

$$x \supseteq y \iff y \sqsubseteq x$$

で定めると、 \supseteq も A 上の半順序となる。このとき、 \supseteq を \sqsubseteq の**双対順序**と呼ぶ。

- ▶ A 上の全順序 \sqsubseteq に対して、 A 上の二項関係 \supseteq を

$$x \supseteq y \iff y \sqsubseteq x$$

で定めると、 \supseteq も A 上の全順序となる。このとき、 \supseteq を \sqsubseteq の**双対順序**と呼ぶ。

双対順序

元の順序での	双対順序での
上界	下界
下界	上界
上限	下限
下限	上限
最大元	最小元
最小元	最大元

直積順序

- ▶ A_1 上の擬順序 \sqsubseteq_1 と A_2 上の擬順序 \sqsubseteq_2 に対して、直積集合 $A_1 \times A_2$ 上の二項関係 \sqsubseteq を

$$\langle x_1, x_2 \rangle \sqsubseteq \langle y_1, y_2 \rangle \iff x_1 \sqsubseteq_1 y_1 \text{ かつ } x_2 \sqsubseteq_2 y_2$$

で定めると、 \sqsubseteq も $A_1 \times A_2$ 上の擬順序となる。このとき、 \sqsubseteq を \sqsubseteq_1 と \sqsubseteq_2 の直積順序と呼ぶ。

- ▶ A_1 上の半順序 \sqsubseteq_1 と A_2 上の半順序 \sqsubseteq_2 に対して、直積集合 $A_1 \times A_2$ 上の二項関係 \sqsubseteq を

$$\langle x_1, x_2 \rangle \sqsubseteq \langle y_1, y_2 \rangle \iff x_1 \sqsubseteq_1 y_1 \text{ かつ } x_2 \sqsubseteq_2 y_2$$

で定めると、 \sqsubseteq も $A_1 \times A_2$ 上の半順序となる。このとき、 \sqsubseteq を \sqsubseteq_1 と \sqsubseteq_2 の直積順序と呼ぶ。

- ▶ 全順序と全順序の直積順序は半順序になるが、一般に全順序にはならない。

辞書式順序

- ▶ A_1 上の全順序 \sqsubseteq_1 と A_2 上の全順序 \sqsubseteq_2 に対して、直積集合 $A_1 \times A_2$ 上の二項関係 \sqsubseteq を

$$\langle x_1, x_2 \rangle \sqsubseteq \langle y_1, y_2 \rangle$$

$$\iff \text{「}x_1 \sqsubseteq_1 y_1 \text{ かつ } x_1 \neq y_1\text{」 または 「}x_1 = y_1 \text{ かつ } x_2 \sqsubseteq_2 y_2\text{」}$$

で定めると、 \sqsubseteq も $A_1 \times A_2$ 上の全順序となる。このとき、 \sqsubseteq を \sqsubseteq_1 と \sqsubseteq_2 から作られる辞書式順序と呼ぶ。

まとめ

- ▶ 擬順序
- ▶ 半順序
- ▶ 全順序
- ▶ 上界・下界
- ▶ 上限・下限
- ▶ 最大元・最小元
- ▶ 双対順序
- ▶ 直積順序
- ▶ 辞書式順序

補足

情報系では単に「順序」といえば半順序を意味することが多い。