離散数学 資料 9
命題論理の初歩

鴨 浩靖

2020 年 12 月 22 日 初版
2022 年 1 月 4 日 第二版

命題

- なんらかの意味で真偽の定まる文を命題と呼びたい。
  - 例によって「命題」の定義はしない。
- 命題を記号を使って取り扱うのが命題論理である。

複合命題

命題を合成する。

$$\begin{array}{cl}
\neg\phi & \phi\ \text{でない} \\
\phi \wedge \psi & \phi\ \text{かつ}\ \psi \\
\phi \vee \psi & \phi\ \text{または}\ \psi \\
\phi \Rightarrow \psi & \phi\ \text{ならば}\ \psi
\end{array}$$

命題論理式

- $X, Y, Z, \ldots$ を命題変数を表すために使う。
  - たりなくなったら、X' や X_1 のように装飾して増やす。
-
$$
\begin{array}{rcl}
\text{命題論理式} & ::= & \text{命題変数} \\
& | & \neg\,\text{命題論理式} \\
& | & \text{命題論理式} \wedge \text{命題論理式} \\
& | & \text{命題論理式} \vee \text{命題論理式} \\
& | & \text{命題論理式} \Rightarrow \text{命題論理式}
\end{array}
$$
  - 紛らわしいときは、適宜、括弧を使う。
  - 括弧がなければ、結合が強い順に $\neg$, $\wedge$, $\vee$, $\Rightarrow$ とする。
  - $\wedge$ と $\vee$ は左結合とし、$\Rightarrow$ は右結合とする。

例によって、文献によって記法の微妙な違いがある。

命題論理式

例

$$
\begin{aligned}
&X \\
&\neg(\neg X \wedge Y) \wedge Z \\
&\neg X \wedge Y \Rightarrow Z \vee \neg W \\
&X_1 \wedge X_2 \wedge X_3 \Rightarrow Y_1 \vee Y_2 \vee Y_3 \vee Y_4
\end{aligned}
$$

真理値

各命題変数 $X, Y, \ldots$ の真理値 $v(X), v(Y), \ldots$ が定まっているとき、それらを含む論理式 ϕ の真理値 $v(\phi)$ を、以下のように再帰的に定める。

- $v(\phi)$ が定まっているとき、$v(\neg\phi)$ を以下のように定める。

ϕ	$\neg\phi$
真	偽
偽	真

- $v(\phi)$ と $v(\psi)$ が定まっているとき、
$v(\phi \wedge \psi)$ と $v(\phi \vee \psi)$ と $v(\phi \Rightarrow \psi)$ を以下のように定める。

ϕ	ψ	$\phi \wedge \psi$	$\phi \vee \psi$	$\phi \Rightarrow \psi$
真	真	真	真	真
真	偽	偽	真	偽
偽	真	偽	真	真
偽	偽	偽	偽	真

真理値表

例

X	Y	Z	$\neg X$	$\neg X \wedge Y$	$\neg(\neg X \wedge Y)$	$\neg(\neg X \wedge Y) \wedge Z$
真	真	真	偽	偽	真	真
真	真	偽	偽	偽	真	偽
真	偽	真	偽	偽	真	真
真	偽	偽	偽	偽	真	偽
偽	真	真	真	真	偽	偽
偽	真	偽	真	真	偽	偽
偽	偽	真	真	偽	真	真
偽	偽	偽	真	偽	真	偽

「ならば」について

ϕ	ψ	$\phi \Rightarrow \psi$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	真
偽	偽	真

「ならば」について

ϕ	ψ	$\phi \Rightarrow \psi$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	真
偽	偽	真

- 「$1 + 2 = 5$ ならば 2022 年 1 月 1 日は国民の祝日である」
  「$1 + 2 = 5$ ならば 2022 年 1 月 4 日は国民の祝日である」
  のいずれも真である。
  - なんか、直観に反する。

「ならば」について

ϕ	ψ	$\phi \Rightarrow \psi$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	真
偽	偽	真

- 「$1 + 2 = 5$ ならば 2022 年 1 月 1 日は国民の祝日である」
  「$1 + 2 = 5$ ならば 2022 年 1 月 4 日は国民の祝日である」
  のいずれも真である。
  - なんか、直観に反する。
- 古典論理の以下の特徴が原因ともいえる。
  - 命題の真理値は真か偽のいずれか一方である
  - 複合命題の真理値は構成する命題の真理値のみから定まり、意味内容には依らない。

「ならば」について

ϕ	ψ	$\phi \Rightarrow \psi$
真	真	真
真	偽	偽
偽	真	真
偽	偽	真

- 「$1+2=5$ ならば 2022 年 1 月 1 日は国民の祝日である」
  「$1+2=5$ ならば 2022 年 1 月 4 日は国民の祝日である」
  のいずれも真である。
  - なんか、直観に反する。
- 古典論理の以下の特徴が原因ともいえる。
  - 命題の真理値は真か偽のいずれか一方である
  - 複合命題の真理値は構成する命題の真理値のみから定まり、意味内容には依らない。
- 少なくとも、数学をするにはこれで困ることはない。

命題論理式の真理値の性質

$$v(\phi \wedge \psi) = v(\psi \wedge \phi) \qquad v(\phi \vee \psi) = v(\psi \vee \phi)$$ **(交換律)**

命題論理式の真理値の性質

$$v((\phi \wedge \psi) \wedge \chi) = v(\phi \wedge (\psi \wedge \chi))$$

$$v((\phi \vee \psi) \vee \chi) = v(\phi \vee (\psi \vee \chi)) \quad \text{(結合律)}$$

命題論理式の真理値の性質

$$v(\phi \wedge (\psi \vee \chi)) = v((\phi \wedge \psi) \vee (\phi \wedge \chi))$$

$$v(\phi \vee (\psi \wedge \chi)) = v((\phi \vee \psi) \wedge (\phi \vee \chi)) \quad \textbf{(分配律)}$$

$$v((\phi \vee \psi) \wedge \chi) = v((\phi \wedge \chi) \vee (\psi \wedge \chi))$$

$$v((\phi \wedge \psi) \vee \chi) = v((\phi \vee \chi) \wedge (\psi \vee \chi)) \quad \textbf{(分配律)}$$

命題論理式の真理値の性質

$$v(\phi \land (\phi \lor \psi)) = v(\phi) \qquad v(\phi \lor (\phi \land \psi)) = v(\phi) \qquad \text{(吸収律)}$$

$$v(\phi \land (\psi \lor \phi)) = v(\phi) \qquad v(\phi \lor (\psi \land \phi)) = v(\phi) \qquad \text{(吸収律)}$$

$$v((\phi \lor \psi) \land \phi) = v(\phi) \qquad v((\phi \land \psi) \lor \phi) = v(\phi) \qquad \text{(吸収律)}$$

$$v((\psi \lor \phi) \land \phi) = v(\phi) \qquad v((\psi \land \phi) \lor \phi) = v(\phi) \qquad \text{(吸収律)}$$

命題論理式の真理値の性質

$$v(\phi \wedge \phi) = v(\phi) \qquad v(\phi \vee \phi) = v(\phi)$$ **(冪等律)**

命題論理式の真理値の性質

$$v(\neg\neg\phi) = v(\phi) \qquad \textbf{(二重否定)}$$

命題論理式の真理値の性質

$$v(\phi \wedge \neg\phi) = \text{偽} \qquad v(\neg\phi \wedge \phi) = \text{偽} \qquad \text{(矛盾律)}$$

$$v(\phi \vee \neg\phi) = \text{真} \qquad v(\neg\phi \vee \phi) = \text{真} \qquad \text{(排中律)}$$

命題論理式の真理値の性質

$$v(\neg(\phi \land \psi)) = v(\neg\phi \lor \neg\psi) \quad \text{(ド・モルガン則)}$$

$$v(\neg(\phi \lor \psi)) = v(\neg\phi \land \neg\psi) \quad \text{(ド・モルガン則)}$$

命題論理式の真理値の性質

$$v(\phi \Rightarrow \psi) = v(\neg\phi \vee \psi)$$

命題論理の意味論

ϕ を命題論理式とする。

- 命題変数の真理値をどのように定めても $v(\phi) =$ 真 が成り立つとき、
  ϕ は恒真であるという。
- 命題変数の真理値をうまく定めれば $v(\phi) =$ 真 が成り立つとき、
  ϕ は充足可能であるという。

命題論理の意味論

$$\phi \text{ は恒真} \iff \neg\phi \text{ は充足可能でない}$$

$$\phi \text{ は充足可能} \iff \neg\phi \text{ は恒真でない}$$

補足：用語と記号に関する注意

- 「真理値」は「真偽値」とも呼ばれる。
- 命題論理式の真理値を表す記法は、さまざまなものが乱立している状況である。まだ、標準的な記法は確立していない。
  - この授業で採用している $v(\phi)$ も数ある記法の一つである。
  - 情報系では $[\![\phi]\!]$ もよく使われている。

まとめ

- 命題論理式
- 真理値

おまけ

最小命題論理	直観主義命題論理	古典命題論理
最小述語論理	直観主義述語論理	古典述語論理