離散数学 資料 2
集合と集合算

鴨 浩靖

2018 年 10 月 11 日
(2017 年 10 月 12 日 2017 年度版)
(2017 年 10 月 13 日修正)
(2018 年 11 月 8 日追記)
(2019 年 9 月 30 日追記)
(2020 年 10 月 8〜14 日追記)

集合とは

- 集合とは、「ものの集まり」を抽象化したものである。
- 「a は A の要素である」「a は A に属する」を $a \in A$ と書く。
- $a \in A$ の否定を $a \notin A$ と書く。

集合の表記

列挙

要素を書き並べて $\{\ \}$ で囲む。

例 $\{2, 3, 5\}$

集合の表記

内包

$\{x \mid \varphi(x)\}$　条件 φ をみたすもの全体の集合

$\{x : \varphi(x)\}$　と書く文献もある。

集合の表記

分出

$\{x \in A \mid \varphi(x)\}$　集合 A の要素のうち、条件 φ をみたすもの全体の集合

集合の表記

分出

$\{x \in A \mid \varphi(x)\}$　集合 A の要素のうち、条件 φ をみたすもの全体の集合

例

$A = \{2, 3, 5\}$ のとき
$B = \{x \in A \mid x$ は偶数 $\}$ とすると

$B = \{2\}$

集合の表記

置換

$\{f(x) \mid x \in A\}$　集合 A の各要素に対して $f(x)$ を構成して集めた集合

集合の表記

置換

$\{f(x) \mid x \in A\}$　集合 A の各要素に対して $f(x)$ を構成して集めた集合

例

$A = \{2, 3, 5\}$ のとき
$B = \{x^2 \mid x \in A\}$ とすると

$$B = \{4, 9, 25\}$$

空集合 $\varnothing$

要素をまったく持たない集合（列挙で書くと $\{\}$）

$$X = \varnothing \iff \text{任意の } x \text{ について } x \notin X \text{ が成り立つ}$$

空集合

記法の注意

$\varnothing$ は ϕ（ギリシア文字）ではない。

数の集合

$\mathbb{N}$　自然数全体の集合
$\mathbb{Z}$　整数全体の集合
$\mathbb{Q}$　有理数全体の集合
$\mathbb{R}$　実数全体の集合
$\mathbb{C}$　複素数全体の集合
$\mathbb{H}$　四元数全体の集合
$\mathbb{O}$　八元数全体の集合

区間

$$(a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$$ 開区間

$$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$$ 閉区間

$$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$$ 半開区間

$$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$$ 半開区間

$$(a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$$

$$[a,+\infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$$

$$(-\infty,b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$$

$$(-\infty,b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$$

$$(-\infty,+\infty) = \mathbb{R}$$

集合の相等

$$A = B \iff \text{任意の } x \text{ について「} x \in A \iff x \in B \text{」}$$

集合間の演算

二項演算—定義

$A \cap B = \{x \mid x \in A$ かつ $x \in B\}$	共通部分
$A \cup B = \{x \mid x \in A$ または $x \in B\}$	合併（和集合）
$A \setminus B = \{x \mid x \in A$ かつ $x \notin B\}$	差集合

集合間の演算

二項演算—定義

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$ 共通部分

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$ 合併（和集合）

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$ 差集合

$A = \{0, 2, 4, 8\}$, $B = \{2, 3, 5\}$ のとき

$$A \cap B = \{2\}$$
$$A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 5, 8\}$$
$$A \setminus B = \{0, 4, 8\}$$

集合間の演算

二項演算—性質

$$A \cap B = B \cap A \qquad A \cup B = B \cup A \qquad \text{(交換律)}$$

集合間の演算

二項演算—性質

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \quad (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \quad \text{(結合律)}$$

集合間の演算

二項演算—性質

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

(分配律)

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C) \quad (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

(分配律)

集合間の演算

二項演算—性質

$$A \cap (A \cup B) = A \qquad A \cup (A \cap B) = A \qquad \text{(吸収律)}$$

$$A \cap (B \cup A) = A \qquad A \cup (B \cap A) = A \qquad \text{(吸収律)}$$

$$(A \cup B) \cap A = A \qquad (A \cap B) \cup A = A \qquad \text{(吸収律)}$$

$$(B \cup A) \cap A = A \qquad (B \cap A) \cup A = A \qquad \text{(吸収律)}$$

集合間の演算

二項演算—性質

$$A \cap A = A \qquad A \cup A = A \qquad \text{(冪等律)}$$

集合間の演算

任意個の演算—定義

I は空でない集合とする。
有限集合でも無限集合でもよい。
I の各要素 i に対して、集合 A_i が決まっているものとする。

$$\bigcap_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{すべての } i \in I \text{ で } x \in A_i \text{ が成り立つ}\}$$

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{x \mid \text{どれかの } i \in I \text{ で } x \in A_i \text{ が成り立つ}\}$$

文脈から I が明らかなときは省略することもある。

$$\bigcap_{i} A_i \qquad \bigcup_{i} A_i$$

集合間の演算

任意個の演算—性質

$$A \cap \bigcup_{i \in I} B_i = \bigcup_{i \in I} (A \cap B_i) \qquad A \cup \bigcap_{i \in I} B_i = \bigcap_{i \in I} (A \cup B_i) \qquad \text{(分配律)}$$

部分集合（包含関係）
定義

$$A \subset B \iff \text{任意の } x \text{ について「} x \in A \text{ ならば } x \in B \text{」}$$

A は B の部分集合である。
A は B に含まれる。

部分集合

性質

$$A \cap B \subset A \qquad\qquad A \subset A \cup B \tag{$\sharp$}$$

$$A \cap B \subset B \qquad\qquad B \subset A \cup B \tag{$\sharp$}$$

$$A \cap B = A \iff A \cup B = B \iff A \subset B$$

部分集合
性質

$$A \subset A$$

$$\emptyset \subset B$$

相等性と部分集合

$$A \subset B \text{ かつ } B \subset A \iff A = B$$

全体集合

集合（仮に U とする）をひとつ決めて、U の部分集合だけを考えることが多い。
そのとき、U を全体集合と呼ぶ。

補集合

全体集合 U が文脈から明らかなとき、

$$A^{\mathsf{c}} = U \setminus A$$

A の補集合

補集合

性質

$$A \setminus B = A \cap B^{\mathsf{c}}$$

補集合

性質

$$(A^{\mathsf{c}})^{\mathsf{c}} = A$$

補集合

性質

全体集合を U とする。

$$\varnothing^{\mathsf{c}} = U \qquad U^{\mathsf{c}} = \varnothing$$

補集合

性質

全体集合を U とする。

$$
\begin{aligned}
A \cap U &= A & A \cup \varnothing &= A & (*)\\
U \cap A &= A & \varnothing \cup A &= A & (*)\\
A \cap \varnothing &= \varnothing & A \cup U &= U & (\dagger)\\
\varnothing \cap A &= \varnothing & U \cup A &= U & (\dagger)
\end{aligned}
$$

補集合
性質

全体集合を U とする。

$$A \cap A^{\mathsf{c}} = \varnothing \qquad A \cup A^{\mathsf{c}} = U \tag{‡}$$

$$A^{\mathsf{c}} \cap A = \varnothing \qquad A^{\mathsf{c}} \cup A = U \tag{‡}$$

補集合

性質

$$(A \cap B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cup B^{\mathsf{c}} \qquad (A \cup B)^{\mathsf{c}} = A^{\mathsf{c}} \cap B^{\mathsf{c}}$$ (ド・モルガン則)

補集合

性質

$$\left(\bigcap_{i\in I} A_i\right)^{\mathsf{c}} = \bigcup_{i\in I} {A_i}^{\mathsf{c}} \qquad \left(\bigcup_{i\in I} A_i\right)^{\mathsf{c}} = \bigcap_{i\in I} {A_i}^{\mathsf{c}} \qquad \text{(ド・モルガン則)}$$

補集合と部分集合

性質

$$A \subset B \iff B^{\mathsf{c}} \subset A^{\mathsf{c}}$$

直積集合 $A \times B$

集合の A の要素と集合 B の要素の順序対すべての集合

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A \text{ かつ } b \in B\}$$

$A \times A$ は A^2 とも書く。

直積集合 $A \times B \times C$

集合の A の要素と集合 B の要素と集合 C の要素の三つ組すべての集合

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A \text{ かつ } b \in B \text{ かつ } c \in C\}$$

$A \times A \times A$ は A^3 とも書く。

もっと多くても同様。

直積集合 $A \times B \times C$

注意

$$A \times B \times C = \{(a, b, c) \mid a \in A \text{ かつ } b \in B \text{ かつ } c \in C\}$$
$$(A \times B) \times C = \{((a, b), c) \mid a \in A \text{ かつ } b \in B \text{ かつ } c \in C\}$$
$$A \times (B \times C) = \{(a, (b, c)) \mid a \in A \text{ かつ } b \in B \text{ かつ } c \in C\}$$

は厳密には異なるが、違いを気にする必要はないことが多い。

冪集合 $\mathscr{P}A$

集合 A の部分集合すべての集合

$$\mathscr{P}A = \{X \mid X \subset A\}$$

冪集合 $\mathscr{P}A$

集合 A の部分集合すべての集合

$$\mathscr{P}A = \{X \mid X \subset A\}$$

例

$$\begin{aligned}
\mathscr{P}\varnothing &= \{\varnothing\} \\
\mathscr{P}\{0\} &= \{\varnothing, \{0\}\} \\
\mathscr{P}\{0, 1\} &= \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\} \\
\mathscr{P}\{0, 1, 2\} &= \{\varnothing, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}, \{0, 1, 2\}\}
\end{aligned}$$

冪集合 $\mathscr{P}A$

集合 A の部分集合すべての集合

$$\mathscr{P}A = \{X \mid X \subset A\}$$

例

$$\begin{aligned}\mathscr{P}\varnothing &= \{\varnothing\}\\ \mathscr{P}\mathscr{P}\varnothing &= \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\\ \mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\varnothing &= \{\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\varnothing, \{\varnothing\}\}\}\end{aligned}$$

冪集合 $\mathscr{P}A$

集合 A の部分集合すべての集合

$$\mathscr{P}A = \{X \mid X \subset A\}$$

例

$\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\mathscr{P}\mathbb{N}$ も集合としてはあり。

補足：記法に関する注意

内包表記 $\{x \mid \varphi(x)\}$ のかわりに $\{x : \varphi(x)\}$ と表記する流儀もある。

空集合 $\varnothing$（円に斜線）のかわりに $\emptyset$（0（数字）に斜線）を使う流儀もある。由来はØ（ラテン文字 O に斜線）。ギリシャ文字 ϕ での代用は不可。

差集合 $A \setminus B$ のかわりに $A - B$ と書く流儀もある。

部分集合 $\subset$ のかわりに $\subseteq$ や $\subseteqq$ を使う流儀もある。最近は $\subset$ が流行っているが、$\subseteq$ もがんばっている。$\subseteqq$ はあまり見なくなってきた。

補集合 A^{c} のかわりに $\overline{A}$ と書く流儀もある。間違ってはいないが閉包と紛らわしくなるので、お勧めできない。

順序対 (a, b) が開区間と紛らわしくなることがある。それを嫌って $\langle a, b \rangle$ と書く流儀もある。

冪集合 $\mathscr{P}A$ のかわりに $\mathfrak{P}A$ と書く流儀もある。今のところ、どちらが優勢になるかはわからない。

練習問題

1. 集合 $A_0, A_1, A_2, \ldots, B_0, B_1, B_2, \ldots$ を以下のように定義する。

$$A_0 = \varnothing \qquad B_0 = \varnothing$$
$$A_{n+1} = \{A_n\} \qquad B_{n+1} = B_n \cup \{B_n\}$$

このとき、A_5 と B_5 を列挙の形で書け。

まとめ

- 集合の表記
- 空集合
- 数の集合
- 区間
- 集合の相等
- 集合間の演算
- 部分集合（包含関係）
- 全体集合
- 補集合
- 直積集合
- 冪集合